APRIL/MAY 2025

CMA63 — COMPLEX ANALYSIS II

Time : Three hours　　　　Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.



1. State Liouville's theorem.

   லியோவெல்லின் தேற்றத்தை கூறுக.

2. State Morera's theorem.

   மொரிராஸ் தேற்றத்தை கூறுக.

3. Write the Maclarin's series expansion for $\sin z$ and $\cos z$.

   $\sin z$ மற்றும் $\cos z$ -ன் மெக்ளரின் தொடர் விரிவாக்கத்தை எழுதுக.

4. Find the Laurent's series expansion of $f(z) = z^2 e^{1/z}$ about $z = 0$.

   $f(z) = z^2 e^{1/z}$ க்கு $z = 0$ என்ற புள்ளியில் லாரன்ஸ் தொடரைக் காண்க.

5. Define singular point with an example.

அருநிலைப் புள்ளியை உதாரணத்துடன் வரையறு.

6. Find the residue of $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$.

$f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ -ன் எச்சத்தைக் காண்க.

7. Evaluate : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{a+b}$.

மதிப்பிடுக : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{a+b}$

8. Prove that $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ என நிரூபி.



9. Define Poles.

துருவங்களை வரையறு.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. State and prove Maximum modulus theorem.
மீப்பெரு மட்டுத் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

17. Find the Taylor's series to represent $\dfrac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$ in $|z| < 2$.

$\dfrac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$, $|z| < 2$ டெய்லர் தொடராக எழுதுக.

18. Find the residue of $\dfrac{1}{z - \sin z}$ at its pole.

$\dfrac{1}{z - \sin z}$-ன் எச்சங்களை அதன் துருவங்களில் காண்க.

19. Evaluate : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx$.

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx$.

20. State and prove Rouche's theorem.
ரூச்சிஸ் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

10. Determine and classify the singularities of $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

$f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$-ன் அருநிலைப் புள்ளிகளை கண்டறிந்து வகைப்படுத்துக.



SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) State and prove fundamental theorem of algebra.
வகை கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்தினை எழுதி நிறுவுக.

Or

(b) Show that the sequence $z_n = -1 + i\dfrac{(-1)^n}{n^2}, n = 1, 2 \ldots$ converges to -1.

$z_n = -1 + i\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $n = 1, 2 \ldots$ என்ற தொடர்வரிசை -1 என்ற எண்ணிற்கு ஒருங்குதலாகும் என காண்க.

12. (a) Expand $z e^{2z}$ as a Taylor's series about $z = -1$.

$z = -1$ என்ற புள்ளியில் $z e^{2z}$-யை டெய்லர் தொடராக விரிவாக்குக.

Or

(b) Expand $\frac{1}{z(z-1)}$ as Laurent's series about $z = 0$.

$z = 0$ என்ற புள்ளியில் $\frac{1}{z(z-1)}$ என்பதை லாரன்ஸ் தொடராக விரிவாக்குக.

13. (a) Find the residues of $\frac{z e^{z}}{(z-1)^{3}}$ at its poles.

$\frac{z e^{z}}{(z-1)^{3}}$-ன் எச்சங்களை அதன் துருவங்களில் காண்க.

Or

(b) Evaluate : $\int_{c} \tan z \, dz$ where $c : |z| = 2$.

மதிப்பிடுக : $\int_{c} \tan z \, dz$ இங்கு $c : |z| = 2$.



14. (a) Prove that $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{6}+1} = \frac{\pi}{3}$.

$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{6}+1} = \frac{\pi}{3}$ என நிரூபி.

Or

(b) Evaluate : $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^{2}+a^{2}} dx$.

மதிப்பிடுக : $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^{2}+a^{2}} dx$.

15. (a) State and prove Argument theorem.

வீச்சுத் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

Or

(b) Find the singularities of the function $f(z) = \frac{z}{e^{z}-1}$ and classify them.

$f(z) = \frac{z}{e^{z}-1}$ என்ற சார்பின் அருநிலைப் புள்ளிகளை காண்க. மேலும் அவற்றை வகைப்படுத்துக.